2 RS 46115

THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, JUNE/JULY 2023.

FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper V — LINEAR ALGEBRA

(W.e.f. 2020-21 Admitted batch)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Define Linear span of a set. Show that $L(S)$ is subspace of V.

   సమితి యొక్క ఋజు వితస్తిని నిర్వచించండి. $L(S)$ అనునది V లో ఉపాంతరాళము అని చూపండి.

2. Prove that intersection of any two subspaces is also a subspace.

   రెండు ఉపాంతరాళముల యొక్క ఛేదనము కూడా ఉపాంతరాళము అని చూపండి.

3. Show that $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ is a basis of $C^3(C)$.

   $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ అనునది $C^3(C)$ యొక్క ఆధారము అని చూపండి.

4. Let $V(F)$ be FDVS and $S=\{\alpha_1,\alpha_2,....\alpha_m\}$ is a L.I. subset of V. Then show that either S itself a basis of V or S can be extended to form a basis of V.

   $V(F)$ అనునది పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము (FDVS) మరియు $S=\{\alpha_1,\alpha_2,....\alpha_m\}$ అనునది V లో ఋజు స్వాతంత్ర్య ఉపసమితి అయితే S అనునది ఆధారము అవుతుంది లేదా దానిని V యొక్క ఆధారంగా విస్తరించవచ్చు అని చూపండి.

5. $T:V_3(R)\to V_2(R)$ is defined by $T(x,y,z)=(x-y,x-z)$. S.T. T is a linear transformation.

   $T:V_3(R)\to V_2(R)$ కు $T(x,y,z)=(x-y,x-z)$ గా నిర్వచించిన T అనునది ఋజుపరివర్తన అని చూపండి.

6. If $U(F)$ and $V(F)$ are two vectorspaces and $T:U\to V$ is a L.T. Then show that null space $N(T)$ is a subspace of $U(F)$.

   $U(F)$ మరియు $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళాలు మరియు $T:U\to V$ ఒక రేఖీయ పరివర్తనాలయితే శూన్యాంతరము $N(T)$ అనునది $U(F)$ కు ఉపాంతరాళము అని చూపండి.

7. Reduce the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ to Echelon form and hence find its rank.

పై మాత్రికను Echelon form కు మార్చి, కోటిని కనుక్కోండి.

8. Solve : $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$, $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$, $4x_1 = 3x_2 - x_3 = 3$, $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$.

పై వాటిని సాధించండి.

9. Prove that $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)\right\}$ is an orthonormal set in R^3 with standard inner product.

$S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)\right\}$ అనునది R^3 లోని క్రమ అంతర్లబ్ధము దృష్ట్యా లంబాబిలంబ సమితి అని చూపండి.

10. State and prove triangle inequality in I.P.S. $V(F)$.

I.P.S. $V(F)$ లో triangle inequality ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. State and prove $N - S$ condition for non-empty subset W of a vectorspace is a subspace $V(F)$.

$V(F)$ అను సదిశాంతరాళములు, శూన్యేతర ఉపసమితి W అనునది ఉపాంతరాళము కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త $N - S$ నియమాలను నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

12. If w_1 and w_2 are two subspaces of $V(F)$ then show that $L(w_1 \cup w_2) = w_1 + w_2$.

$V(F)$ సదిశాంతరాళములు w_1, w_2 లు రెండు ఉపాంతరాళములు అయితే $L(w_1 \cup w_2) = w_1 + w_2$ అని చూపండి.

13. Show that any two basis of FVDS must have same number of elements.

ఒక పరిమిత పరిమాణాల సదిశాంతరాళము యొక్క ఏ రెండు ఆధారాలలోని మూలకాల సంఖ్య సమానము అని చూపండి.

Or

14. Let W_1 and W_2 are two subspaces of R^4 given by $W_1 = \{(a,b,c,d)/b-2c+d=0\}$ $W_2 = \{(a,b,c,d)/a=d, b=2c\}$. Find the basis and remain of $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ and hence find $\dim(W_1+W_2)$

W_1, W_2 లు R^4 లో రెండు ఉపాంతరాళాలు. $W_1 = \{(a,b,c,d)/b-2c+d=0\}$ $W_2 = \{(a,b,c,d)/a=d, b=2c\}$ అయితే $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ ల ఆధార మరియు పరిమాణాలు $\dim(W_1+W_2)$ కనుగొని విలువ కనుక్కోండి.

15. State and prove Rank-nullity theorem.

కోటి- శూన్యతా సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

16. If $T: V_4(R) \to V_3(R)$ is L.T. defined by $T(a,b,c,d) = (a-b+c+d,\ a+2c-d,\ a+b+3c-3d)$ for $a,b,c,d \in R$ verify $\rho(T)+\upsilon(T) = \dim V_4(R)$.

$T: V_4(R) \to V_3(R)$ అను ఋజు పరివర్తనను $T(a,b,c,d) = (a-b+c+d, a+2c-d, a+b+3c-3d)$ గా నిర్వచిస్తే $a,b,c,d \in R$ $\rho(T)+\upsilon(T) = \dim V_4(R)$ ను సరిచూపండి.

17. Find Eigen values and eigen vectors of $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

పై మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక విలువలను మరియు లాక్షణిక మాత్రికను కనుగొనుము.

Or

18. State and prove Cayley-Hamilton theorem.

Cayley-Hamilton theorem ను నిర్వచించి నిరూపించండి.

19. State and prove Cauchy-Schwartz inequality.

Cauchy-Schwartz అసమానతను నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

20. State and prove Bessel's inequality.

Bessel's inequality ను నిర్వచించి నిరూపించండి.